Critère de Sylvester | Leçons : 170, 171

Lemme : Soit E un espace vectoriel, F s.e.v de E et q forme quadratique.
Alors si $q_{|F}$ est définie on a $F \oplus F^{\perp} = E$

Preuve :

- Si $x \in F^{\perp} \cap F$ on a $q(x) = \varphi(x,x) = 0$ car $q_{|F}$ est définie on a $x = 0$
  D'où $F \cap F^{\perp} = \{0\}$
- Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base $q_{|F}$-orthogonale de F. Soit $x \in E$

On pose
$$\begin{cases} \lambda_i = \dfrac{\varphi(e_i, x)}{\varphi(e_i, e_i)} & (\varphi(e_i,e_i) \neq 0 \text{ car } \varphi_{|F} \text{ est définie}) \\ y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in F \end{cases}$$

$\forall j \in [\![1,p]\!]$ on a
$$\begin{aligned} \varphi(x-y, e_j) &= \varphi(x,e_j) - \varphi(y,e_j) \\ &= \varphi(x,e_j) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi(e_i,e_j) \\ &= \varphi(x,e_j) - \lambda_j \varphi(e_j,e_j) \\ &= \varphi(x,e_j) - \varphi(x,e_j) = 0 \end{aligned}$$

D'où $x - y \in F^{\perp}$

D'où $x = \underbrace{x-y}_{\in F^{\perp}} + \underbrace{y}_{\in F}$

D'où $F \oplus F^{\perp} = E$. $\square$

Thm : $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ on note $M_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$
M est définie positive si et seulement si $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\det M_k > 0$

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit q la forme quadratique dont M est la matrice dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ on a que M_k est la matrice de la restriction de q à $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. q étant définie positive on a que sa restriction aussi donc
~~Donc M_k est une matrice définie positive, d'où $\det M_k > 0$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$~~ $P \in GL_k(\mathbb{R})$
sa signature est $(k,0)$ donc par Inertie de Sylvester on a $M_k = {}^tP I_k P \Rightarrow \det M_k = (\det P)^2 > 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la taille de M.

- Si $n=1$, $\det(M_1) > 0$ par hypothèse donc ok
- Supposons le résultat vrai ~~au rang~~ jusqu'au rang $n-1$ et montrons le au rang n.
Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $\det M_k > 0$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, Soit q telle que $M = \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(q)$, $M_{n-1} \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ par hyp de réc

Notons $H = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$. Par hypothèse de récurrence on a que $q_{|H}$ est définie positive

On désigne par $(e_1', \dots, e_{n-1}')$ une base orthonormée pour $q_{|H}$. Or ~~donc~~ par le lemme on a $H \oplus H^\perp = \mathbb{R}^n$.

Si on note e_n' un vecteur non nul de $H^\perp$ $(\dim H^\perp = 1)$ la famille $\beta = (e_1', \dots, e_n')$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de q dans cette base s'écrit

$$N = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & \alpha \end{array}\right]$$

On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à β.

On a $N = {}^tPMP$ d'où $\det N = (\det P)^2 \det M > 0$ par hypothèse

D'où $\alpha = \det N > 0$ d'où q est définie positive.

D'où $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$?

$\square$

<u>Applica°</u> : $A = \left(\frac{1}{1+|i-j|}\right)_{1\le i,j \le n} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

<u>Preuve</u> : Si on fixe $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\forall t \in]0,1[$ et $M(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a que si ${}^tXM(t)X > 0$ alors $0 < \int_0^1 {}^tXM(t)X\,dt = {}^tX \underbrace{\int_0^1 M(t)\,dt}_{=A} X = {}^tXAX$

$M(t) \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Ici on a que $\frac{1}{1+|i-j|} = \int_0^1 t^{|i-j|}\,dt$ et donc $M(t) = (t^{|i-j|})_{1\le i,j\le n} \in S_n(\mathbb{R})$

montrons que $M(t)$ est définie positive pour avoir le résultat.

~~On montre par récur~~

On pose $D_r(t) = \det\left((t^{|i-j|})_{1\le i,j\le r}\right)$ et on montre par récurrence que $D_r(t) = (1-t^2)^{r-1}$

- Si $r=1$ on a $D_1(t)=1$
- Supposons le résultat vrai au rang r, au rang $r+1$ on a :

$$D_{r+1}(t)=\begin{vmatrix} 1 & t & \cdots & t^r \\ t & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t \\ t^r & \cdots & t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & \cdots & t^{r-1} & 0 \\ t & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ t^r & \cdots & & t & 1-t^2 \end{vmatrix} = (1-t^2)D_r(t)$$

$C_{r+1} \leftarrow C_{r+1} - tC_r$

D'où ~~le résultat~~. la récurrence

$\forall t \in]0,1[$

D'où $\forall r \in [\![1,n]\!]$, $\det M_r(t) > 0$ d'où par critère de Sylvester on a que $M(t) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ d'où ~~M~~ $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

$\square$

Algèbre, Gourdon

COMPLEMENTS

- On a bien ${}^tXM(t)X > 0 \Rightarrow \int_0^1 {}^tXM(t)X\,dt > 0$ par positivité de l'intégration et car si on avait $\int_0^1 {}^tXM(t)X\,dt$ alors ${}^tXM(t)X=0$ $\forall t$, absurde.

- Savoir démontrer la loi d'inertie de Sylvester (Une idée à minima) ~~!~~
- Savoir formule de développement par rapport à une colonne.

- Par la même méthode on peut montrer que la matrice de Hilbert $H=\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$: $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2}\,dt$

D'où ${}^tXHX = \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{i+j-1} = \int_0^1 \sum_{i,j} x_i x_j t^{i+j-2}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}\right)^2 dt \geq 0$